LA VISUALIZACION EN LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDPS

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodríguez y Lorena F. Laugero

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás – Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332 (2900) San Nicolás, Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

RESUMEN

Muchos problemas de ingeniería se describen planteando ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Aunque en algunos casos es posible encontrar la solución exacta de este tipo de problemas, muchos no pueden ser resueltos aplicando un procedimiento analítico. Sin embargo, puede obtenerse una solución aproximada utilizando un método numérico adecuado.

Los programas simbólicos son una poderosa herramienta para resolver las mencionadas ecuaciones debido a que, además de permitir programar métodos propios, tienen herramientas específicas con las que se pueden obtener fácilmente gráficos de la solución obtenida.

Para la unidad correspondiente al método de diferencias finitas de los cursos de Análisis Numérico de la Facultad Regional San Nicolás se confeccionaron distintas ventanas personalizadas, que resuelven las ecuaciones que se estudian en los cursos. El objetivo de la incorporación de este tipo de herramientas en la enseñanza del tema es lograr, por medio de la visualización, que los alumnos internalicen adecuadamente algunos conceptos que suelen resultar abstractos.

En este trabajo se describen las ventanas personalizadas desarrolladas y, además, se muestran distintos ejemplos, seleccionados adecuadamente, donde los alumnos podrán comprender fácilmente determinados conceptos así como también analizar las ventajas y desventajas que presentan cada uno de los métodos numéricos estudiados.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, ventanas personalizadas, MAPLE, SCILAB.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza tradicional de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) suele caracterizarse por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos.

Muchos investigadores han coincidido en afirmar que los estudiantes construyen un conocimiento matemático parcial constituido principalmente por algoritmos. Esta situación hace que los alumnos manejen rutinariamente los símbolos, pero no logren otorgar significado a las ideas básicas de los métodos numéricos. La falta de articulación entre los diferentes registros semióticos dificulta la comprensión e internalización adecuada de los conceptos matemáticos involucrados y, por lo tanto, impide su transferencia a otros contextos [1]. Todo esto sumado a que, por lo general, los estudiantes tienen inconvenientes para comprender la esencia del Análisis Numérico, hace que se detecten en su aprendizaje diversas dificultades. Así, por ejemplo, en el estudio de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales existe una serie de conceptos (estabilidad, convergencia, orden de precisión, entre otros) que son catalogados por los mismos alumnos como difíciles de comprender o abstractos.

La incorporación de programas computacionales puede ser un recurso didáctico facilitador de los procesos de aprendizaje debido a que constituyen un medio para articular los distintos registros semióticos de un concepto. Por todo lo expuesto, para la unidad correspondiente a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales utilizando el método de diferencias finitas, se confeccionaron distintas ventanas personalizadas. Las mismas resuelven las ecuaciones que se estudian en los cursos de de Análisis Numérico de la Facultad Regional San Nicolás: la ecuación de Poisson, de difusión y de onda. Los programas utilizados para la generación de dichas ventanas fueron MAPLE y SCILAB. La elección de estos programas se basa fundamentalmente en el hecho de que el primero ofrece grandes posibilidades en cuanto al manejo de los gráficos y animaciones, mientras que el segundo es de fácil obtención debido a que se encuentra disponible en forma gratuita en Internet.

El objetivo general de este trabajo es presentar las ventanas personalizadas desarrolladas que se utilizarán en el segundo cuatrimestre del ciclo lectivo 2010. Además, se mostrarán distintos ejemplos, seleccionados adecuadamente, donde los alumnos podrán comprender fácilmente determinados conceptos así como también analizar las ventajas y desventajas que presentan cada uno de los métodos numéricos estudiados. Se supone que los métodos utilizados en las distintas ventanas son conocidos [2-5], y por ello no se incluye su descripción.

2. LA VISUALIZACIÓN

La visualización es una de las habilidades que se promueve al relacionar convenientemente los métodos numéricos con la tecnología para resolver ecuaciones diferenciales.
La visualización es un concepto amplio, de hecho es una noción sobre la que hay diferentes concepciones en la investigación de la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, para Arcavi [6] la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.
Por esta razón, es factible que el uso de ventanas personalizadas en el proceso de aprendizaje no sólo contribuya a que los alumnos desarrollen la habilidad de visualizar, sino que la interacción dinámica con las mismas permita realizar transformaciones entre las distintas representaciones semióticas del objeto en estudio, favoreciendo así el aprendizaje conceptual.

3. VENTANAS PERSONALIZADAS

Las versiones más recientes de los programas computacionales simbólicos ofrecen la posibilidad de diseñar interfaces gráficas personalizadas. En particular, MAPLE y SCILAB permiten crear ventanas de diseño propio, es decir, aplicaciones en ventanas que permiten hacer lo que el diseñador se propone, utilizando la potencia de cálculo y graficación que dispone el software.
La idea primordial del desarrollo que se presenta en este trabajo es que los alumnos obtengan la solución numérica de distintas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aplicando el método pertinente, en una interfaz gráfica amigable y sin preocuparse por los comandos necesarios para obtener dicha solución.
De esta manera, los alumnos no sólo focalizarán su atención en el objeto en estudio sino que por medio de la visualización, utilizando las ventanas, podrán comparar los métodos que se estudian, analizar las ventajas y desventajas de la aplicación de los mismos, descubrir conceptos matemáticos, conjeturar generalizaciones. Es decir, desarrollar y potenciar un tipo de pensamiento matemático diferente.

4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDPS. VENTANA DEMO

A partir del año 2004, en las distintas carreras que se dictan en la Facultad Regional San Nicolás se fueron incorporando asignaturas en las que se estudian temas de análisis numérico. Desde el inicio se han ido detectando diversas dificultades en su aprendizaje, sobre todo, en la resolución numérica de EDPs.
Es por ello que, teniendo en cuenta la importancia y los beneficios del uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje, se diseñaron distintas ventanas personalizadas que permiten resolver las ecuaciones que se estudian en dichos cursos utilizando el método de diferencias finitas: la ecuación de Poisson, de difusión y de onda.

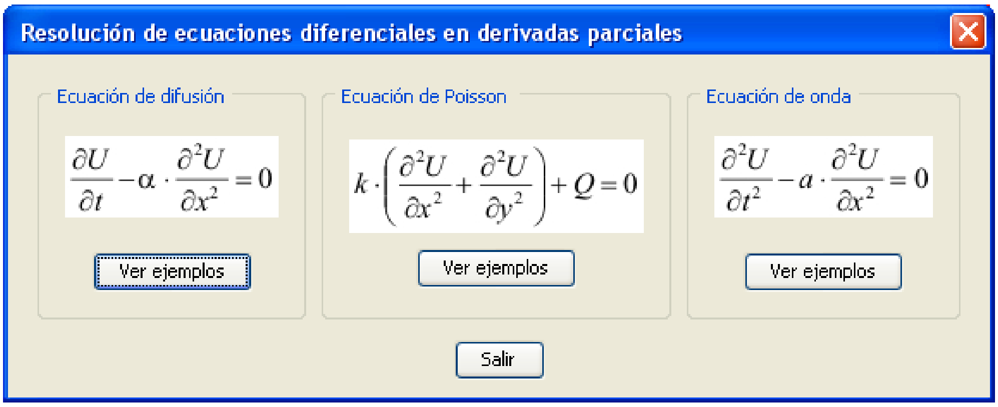


Figura 1. Interfaz principal de la ventana DEMO

En la Figura 1 se muestra la interfaz principal de la ventana DEMO generada en MAPLE. Esta ventana personalizada tiene como objetivo principal comparar, para ciertos problemas, la solución analítica y numérica de las ecuaciones ya mencionadas.
En todos los casos, al pulsar el botón **Ver Ejemplos**, aparece una nueva ventana donde se proponen distintas situaciones que son resueltas utilizando el método de diferencias finitas. Así, al presionar dicho botón en la ecuación de Poisson, los alumnos podrán ver la ventana de la Figura 2.

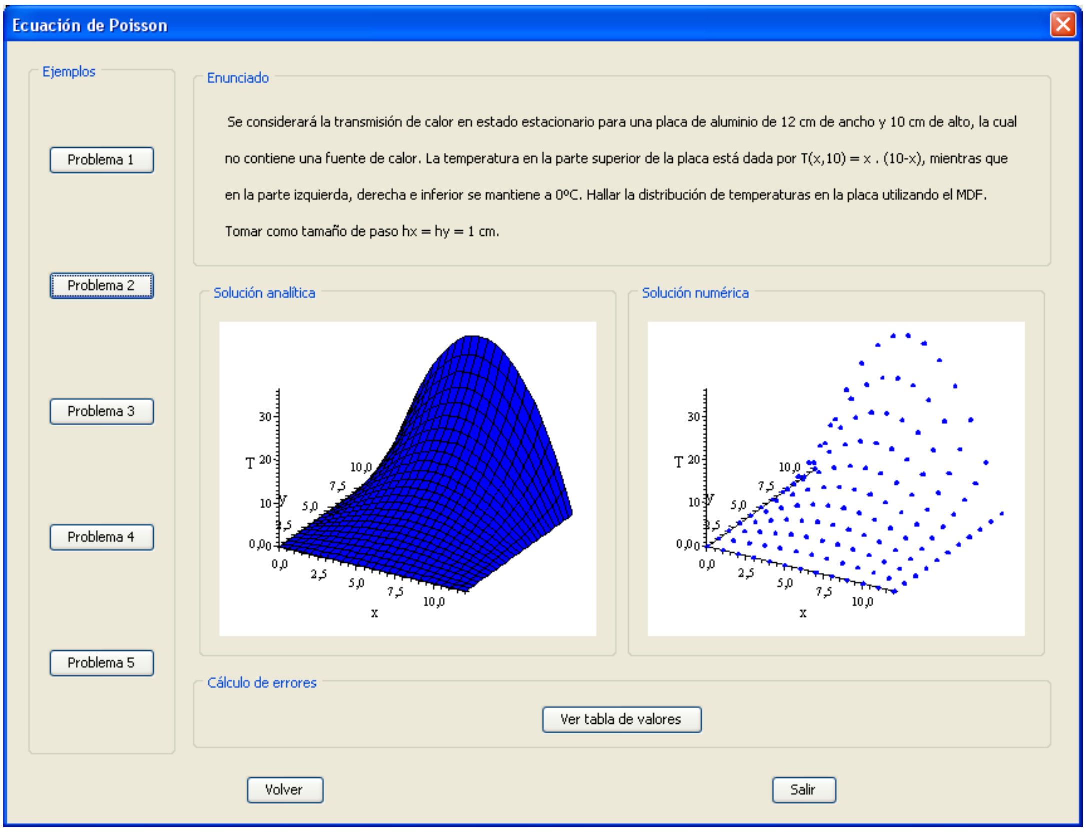


Figura 2. Ventana DEMO de la ecuación de Poisson

Como se puede observar, en la parte superior de la ventana personalizada, se encuentra el enunciado del problema propuesto y el tamaño de paso seleccionado para obtener la solución numérica del mismo. Al presionar sobre cada uno de los botones que se encuentran en la sección Ejemplos, se podrá comparar gráficamente la solución analítica y numérica obtenida. En el caso de que el alumno quiera calcular la diferencia entre ambas soluciones para ciertos puntos del dominio en estudio, bastará con pulsar el botón **Ver tabla de valores**.
Con la finalidad de que el alumno pueda comprender el concepto de convergencia de un método de resolución numérica, se propone resolver el mismo ejemplo pero tomando tamaños de paso cada vez más pequeños (Problema 1, Problema 2 y Problema 3).
De la simple observación, el alumno podrá concluir que a medida que se toma un tamaño de paso menor, la solución numérica se aproxima cada vez más a la analítica. Cabe aclarar que esto siempre sucede si el método de diferencias finitas con el que se está resolviendo la ecuación diferencial es incondicionalmente estable.

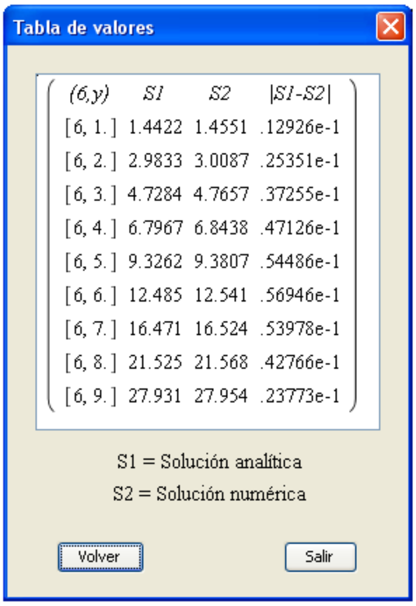
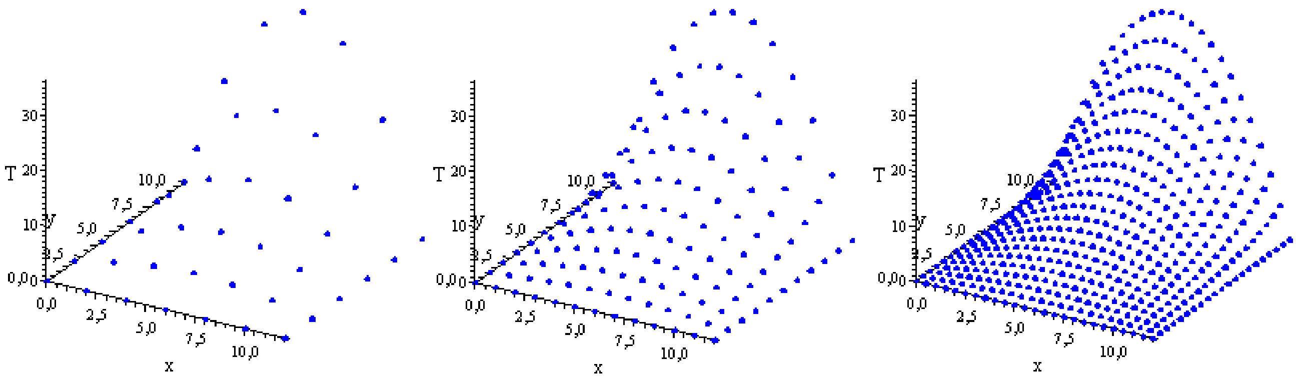


Tabla de valores

(6,y)	S1	S2	|S1-S2|
[6, 1.]	1.4422	1.4551	.12926e-1
[6, 2.]	2.9833	3.0087	.25351e-1
[6, 3.]	4.7284	4.7657	.37255e-1
[6, 4.]	6.7967	6.8438	.47126e-1
[6, 5.]	9.3262	9.3807	.54486e-1
[6, 6.]	12.485	12.541	.56946e-1
[6, 7.]	16.471	16.524	.53978e-1
[6, 8.]	21.525	21.568	.42766e-1
[6, 9.]	27.931	27.954	.23773e-1

S1 = Solución analítica
S2 = Solución numérica
Volver Salir

Figura 3. Ventana tabla de valores



$h_x = h_y = 2\,\mathrm{cm}$ $h_x = h_y = 1\,\mathrm{cm}$ $h_x = h_y = 0{,}5\,\mathrm{cm}$

Figura 4. Concepto de convergencia de un método numérico

En los Problemas 3 y 4, se propone resolver la situación planteada pero utilizando distintos tamaños de paso en cada dirección. En estos ejemplos, los alumnos podrán determinar cuál es la relación que existe entre la solución numérica obtenida y el valor $\beta = h_x / h_y$.
Del análisis y comparación de las respectivas gráficas y tablas, los alumnos concluirán que si bien no hay una ventaja matemática formal cuando dicho valor es uno, valores de β cercanos a la unidad tienden a producir soluciones más aproximadas [7].

Al presionar el botón **Ver Ejemplos** correspondiente a la ecuación de difusión, aparecerá la ventana que se muestra en la Figura 5. Como se puede observar, dicha ventana presenta una interfaz muy similar a la ventana ya descripta. Es importante aclarar que, en todos los casos se ha graficado la condición inicial en color azul.

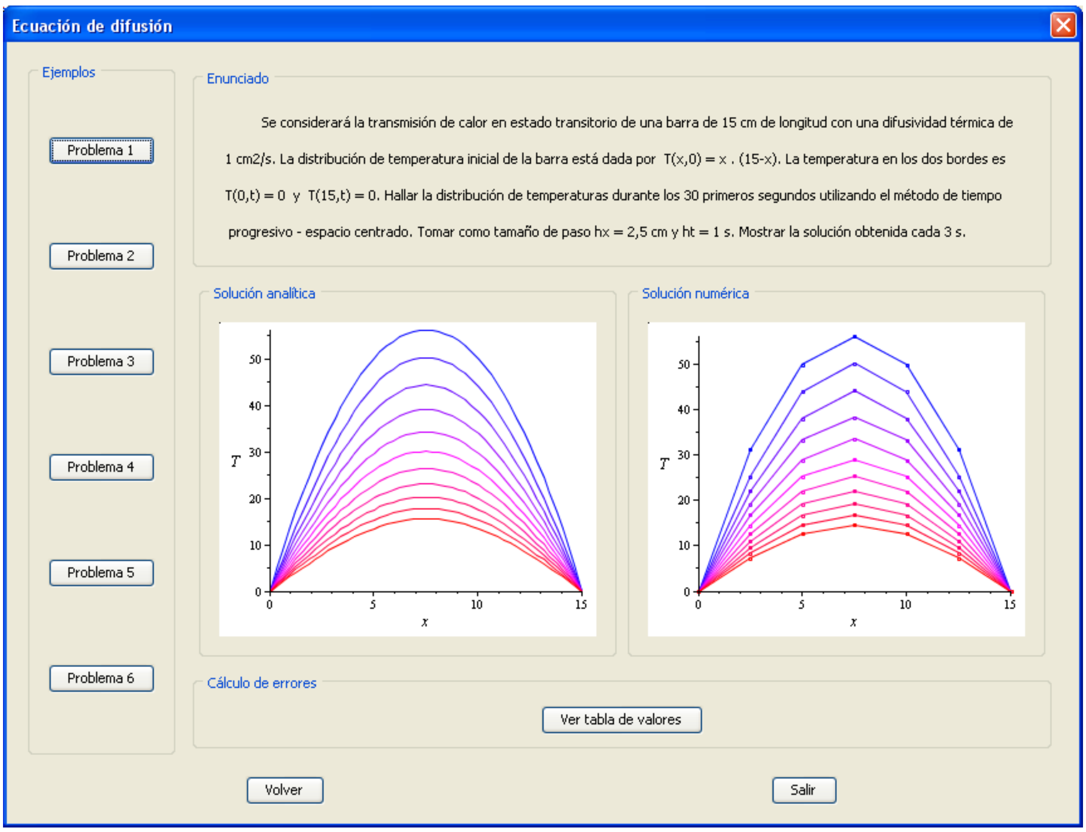
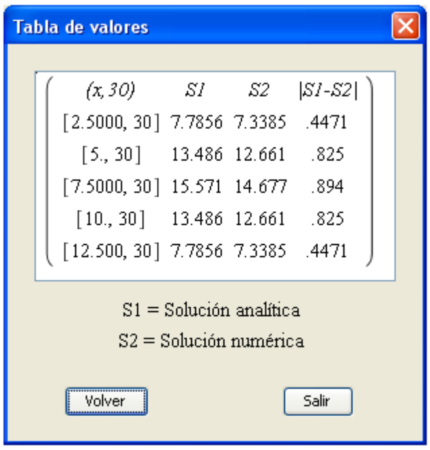


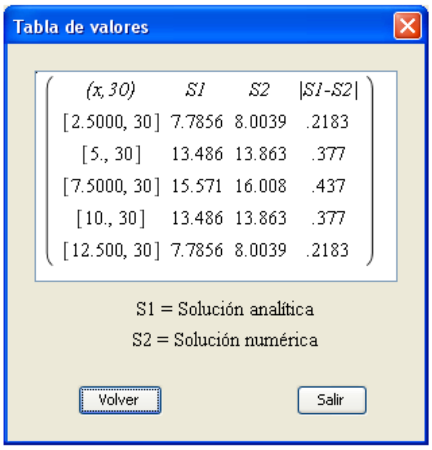
Figura 5. Ventana DEMO de la ecuación de difusión

Con el objetivo de que el alumno pueda comprender lo que significa y para qué es importante conocer el orden de precisión de un método de resolución numérica, se propone resolver el mismo ejemplo utilizando distintos métodos numéricos: método de tiempo progresivo – espacio centrado, método de tiempo regresivo – espacio centrado, método de Crank - Nicolson (Problema 1, Problema 2 y Problema 3).
Del análisis de las tablas que se muestran en la Figura 6, el alumno podrá concluir, por ejemplo, que el método de tiempo progresivo – espacio centrado no es tan preciso como el de Crank – Nicolson. Esto se debe a que éste último método utiliza una aproximación de segundo orden tanto para la derivada espacial como para la temporal. En cambio, el método de tiempo progresivo – espacio centrado, si bien emplea la misma aproximación para la derivada espacial, usa una aproximación de primer orden para la derivada temporal.



(x, 30)	S1	S2	|S1-S2|
[2.5000, 30]	7.7856	7.3385	.4471
[5., 30]	13.486	12.661	.825
[7.5000, 30]	15.571	14.677	.894
[10., 30]	13.486	12.661	.825
[12.500, 30]	7.7856	7.3385	.4471

(a)



(x, 30)	S1	S2	|S1-S2|
[2.5000, 30]	7.7856	8.0039	.2183
[5., 30]	13.486	13.863	.377
[7.5000, 30]	15.571	16.008	.437
[10., 30]	13.486	13.863	.377
[12.500, 30]	7.7856	8.0039	.2183

(b)

Figura 6. Tabla de valores correspondiente al método de tiempo progresivo – espacio centrado (a) y al método de Crank – Nicolson (b).

Por último, al pulsar el botón **Ver Ejemplos** correspondiente a la ecuación de onda, se mostrará la ventana que se observa en la Figura 7.

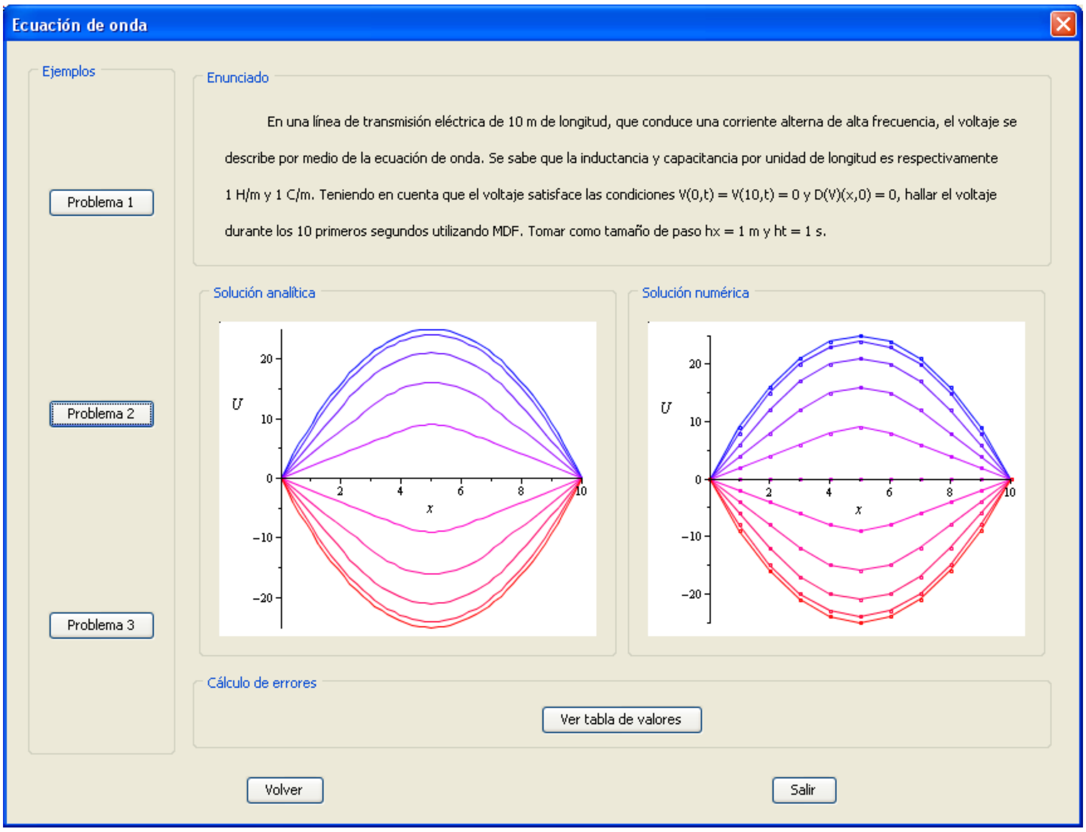
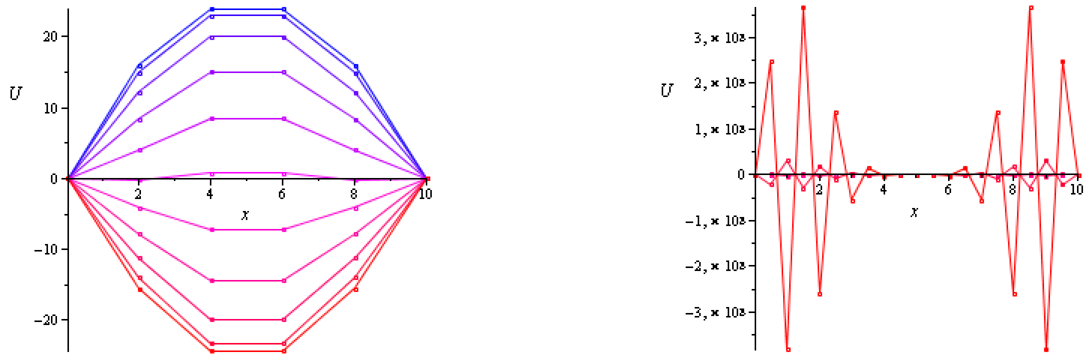


Figura 7. Ventana DEMO de la ecuación de onda

A través de los distintos ejemplos que se proponen, el alumno podrá internalizar el concepto de estabilidad de un método numérico. Es decir, al resolver el mismo problema tomando distintos tamaños de paso podrá comprobar experimentalmente que el método empleado para resolver la ecuación de onda es condicionalmente estable debido a que proporciona una solución numérica acotada para determinados tamaños de paso.
Cabe aclarar que, en los gráficos bidimensionales que aparecen en las ventanas de la ecuación de difusión y onda, se unieron los puntos que constituyen la solución numérica para una mejor interpretación.



$h_x = 2\,\text{m}$ y $h_t = 1\text{s}$ $\qquad$ $h_x = 0{,}5\,\text{m}$ y $h_t = 1\text{s}$

Figura 8. Concepto de estabilidad de un método numérico

Además de la ventana DEMO, se diseñaron ventanas que permiten resolver distintos problemas.

5. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE POISSON

En la Figura 9 se muestra la interfaz de una ventana diseñada en SCILAB para resolver problemas descriptos por la ecuación de Poisson.

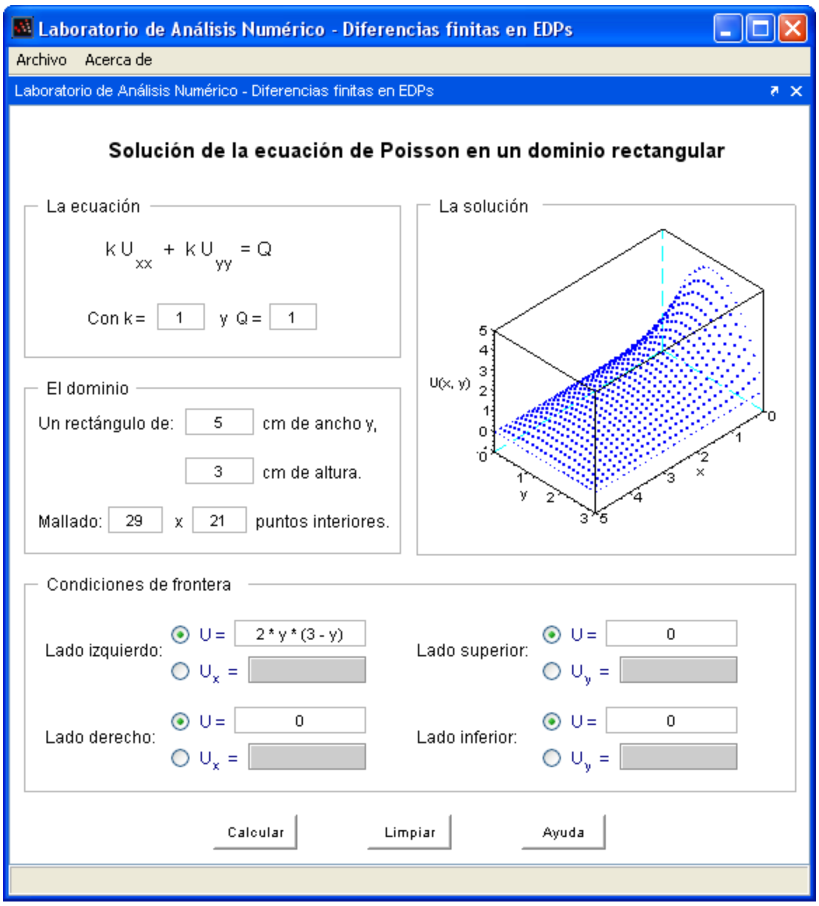


Figura 9. Ventana de la ecuación de Poisson

Para la utilización de esta ventana, se deben ingresar los valores de los coeficientes de la ecuación, su término independiente, las dimensiones del dominio en estudio, la cantidad de puntos interiores que se tomarán en cada dirección y las condiciones de frontera, ya sean de Dirichlet o Neumann. Para obtener la solución numérica de la ecuación planteada, basta con pulsar el botón **Calcular**. De esta manera, se mostrará la salida gráfica que se puede observar en la parte superior de la ventana.

6. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Como en la ventana de la ecuación de Poisson, en la ventana que resuelve la ecuación de onda, es necesario, en primer lugar, ingresar la información que requiere cada uno de los campos que presenta la misma para calcular la solución numérica. Luego se debe seleccionar el tipo de salida gráfica que se desee: solución gráfica bidimensional o tridimensional.

En la Figura 10 se muestran las salidas gráficas bidimensional y tridimensional para el ejemplo ingresado.

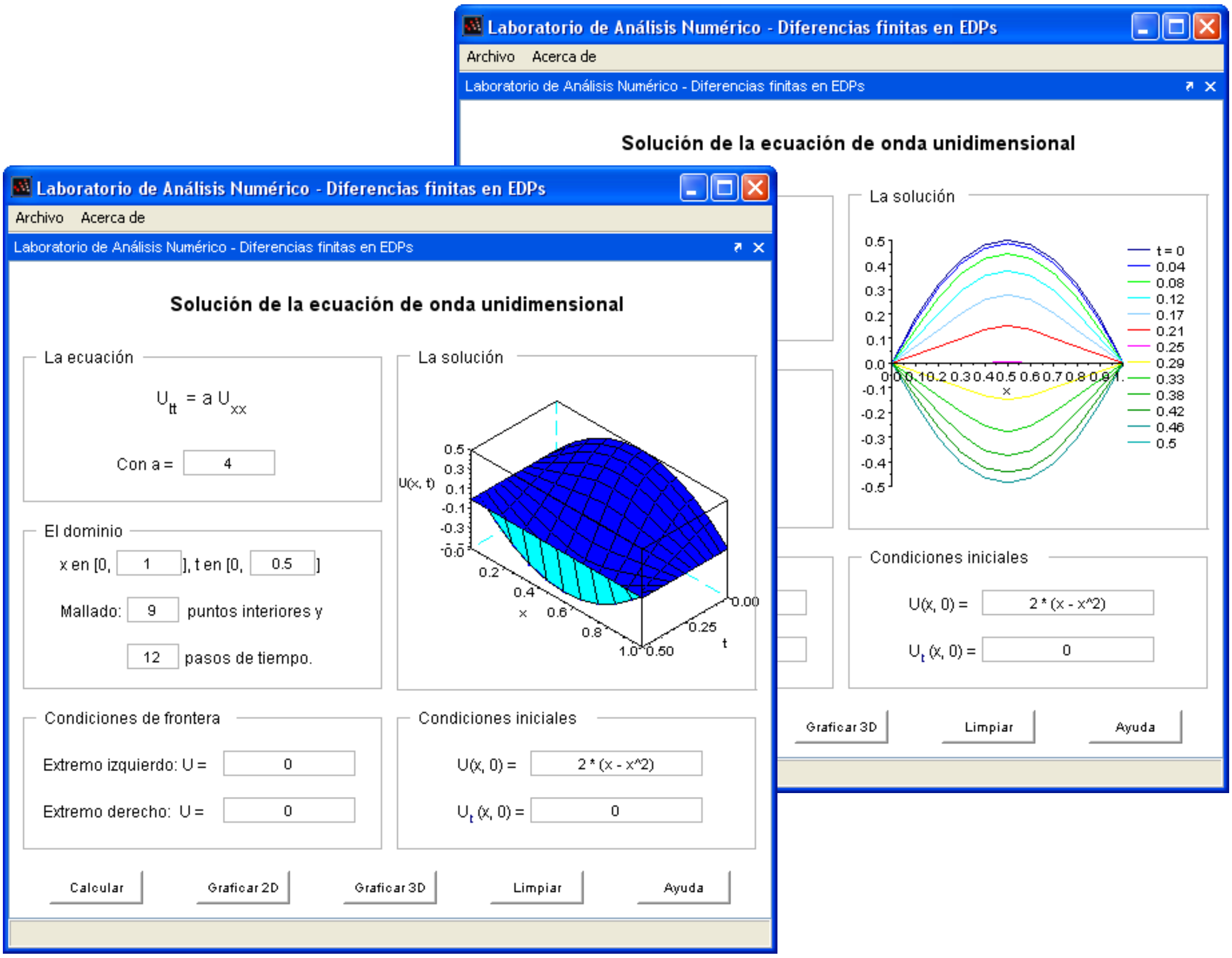


Figura 10. Distintas salidas gráficas de la ventana de la ecuación de onda

7. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

Por último, se mostrará la ventana generada en MAPLE para resolver la ecuación de difusión. La Figura 11 muestra la interfaz de la misma. Para hacer uso de ella, además de ingresar la información que se requiere, se debe seleccionar el método que se desea aplicar para resolver la ecuación. Para obtener dicha solución, es necesario presionar el botón **Calcular**. De esta manera, se habilitarán ambos botones **Graficar**.

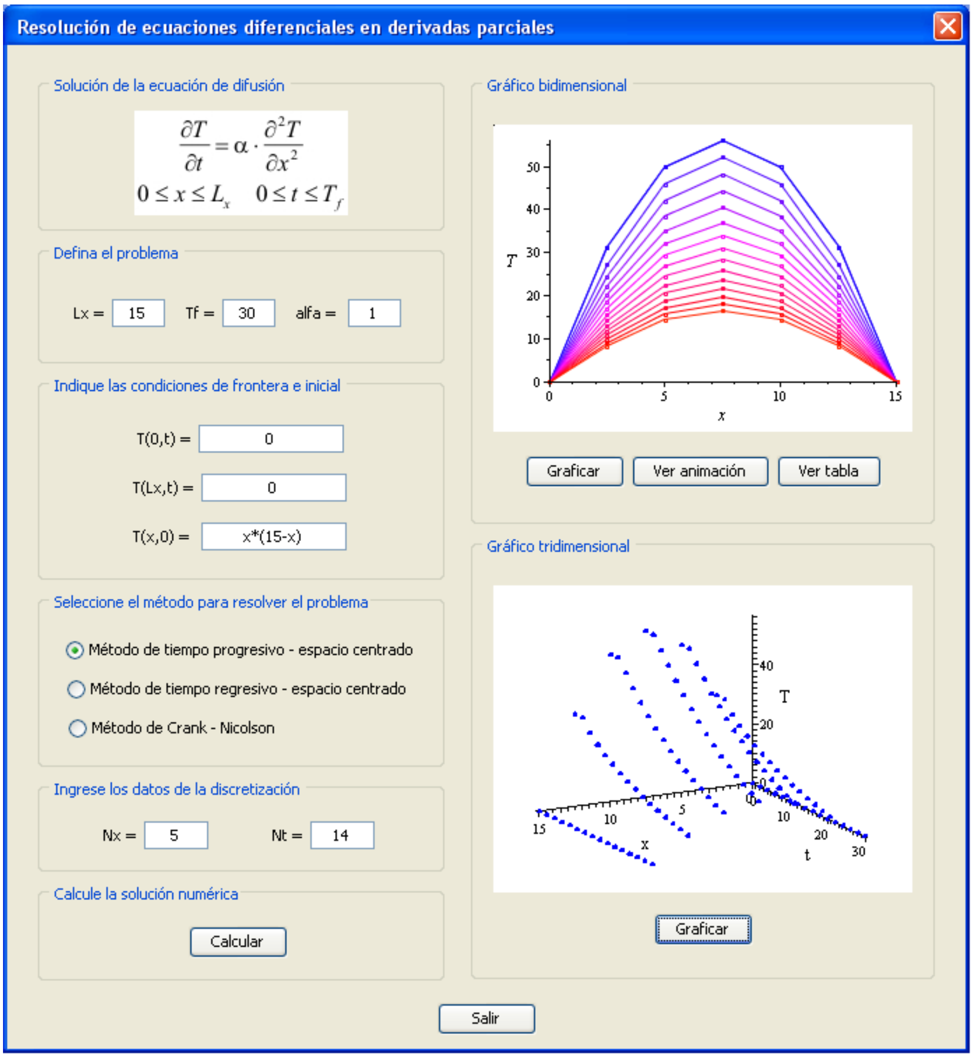


Figura 11. Ventana de la ecuación de difusión

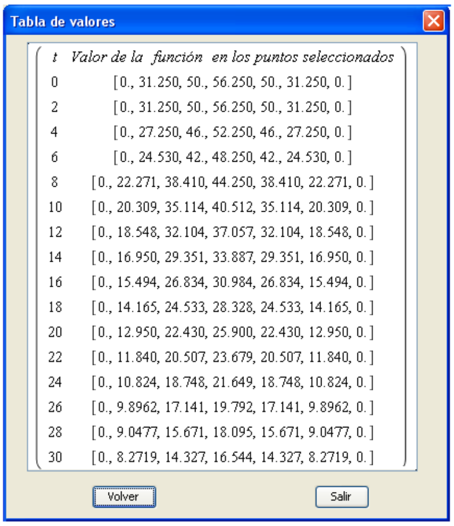


Tabla de valores

t	Valor de la función en los puntos seleccionados
0	[0., 31.250, 50., 56.250, 50., 31.250, 0.]
2	[0., 31.250, 50., 56.250, 50., 31.250, 0.]
4	[0., 27.250, 46., 52.250, 46., 27.250, 0.]
6	[0., 24.530, 42., 48.250, 42., 24.530, 0.]
8	[0., 22.271, 38.410, 44.250, 38.410, 22.271, 0.]
10	[0., 20.309, 35.114, 40.512, 35.114, 20.309, 0.]
12	[0., 18.548, 32.104, 37.057, 32.104, 18.548, 0.]
14	[0., 16.950, 29.351, 33.887, 29.351, 16.950, 0.]
16	[0., 15.494, 26.834, 30.984, 26.834, 15.494, 0.]
18	[0., 14.165, 24.533, 28.328, 24.533, 14.165, 0.]
20	[0., 12.950, 22.430, 25.900, 22.430, 12.950, 0.]
22	[0., 11.840, 20.507, 23.679, 20.507, 11.840, 0.]
24	[0., 10.824, 18.748, 21.649, 18.748, 10.824, 0.]
26	[0., 9.8962, 17.141, 19.792, 17.141, 9.8962, 0.]
28	[0., 9.0477, 15.671, 18.095, 15.671, 9.0477, 0.]
30	[0., 8.2719, 14.327, 16.544, 14.327, 8.2719, 0.]

Volver Salir

Figura 12. Tabla de valores

En esta ventana existe la posibilidad de analizar y comparar la solución bidimensional con la tridimensional en forma simultánea. También es posible obtener una tabla con la solución numérica calculada en los distintos puntos del dominio espacial para las distintas capas temporales, como muestra la Figura 12. Para ello, es necesario pulsar el botón **Ver tabla**.

En esta ventana se han unido también los puntos que constituyen la solución numérica. No obstante, una cuestión para recalcarles a los alumnos es que si bien algunas de las salidas gráficas parecen ser continuas la solución obtenida por el método de diferencias finitas es discreta.

La evolución de la solución en función del tiempo puede verse en forma dinámica, en una ventana nueva que se abre con el botón **Ver animación**. Algunos de los cuadros de la animación se presentan en la Figura 13.

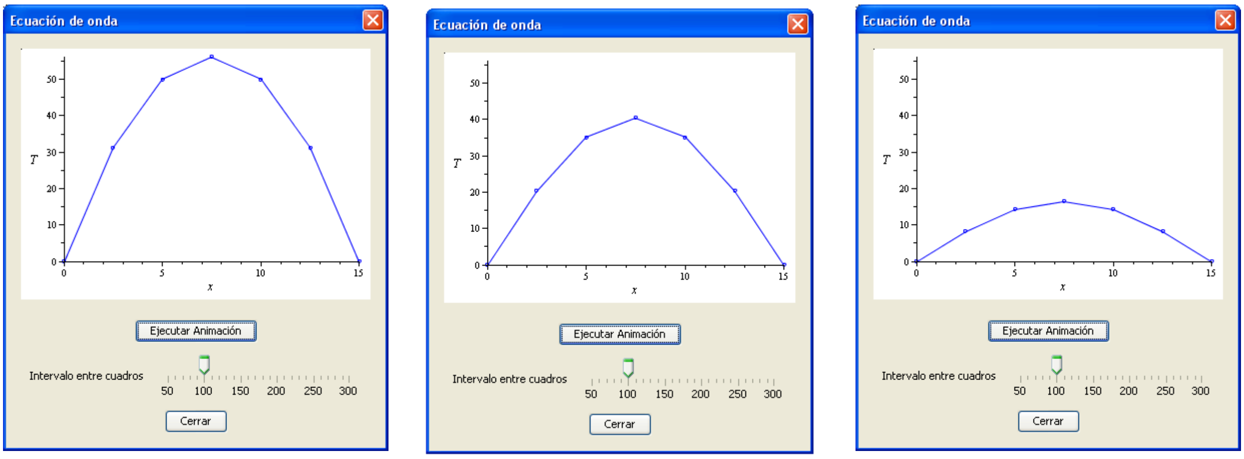


Figura 13. Animación de la solución de la ecuación de difusión

8. CONCLUSIONES

El uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje ha generado cambios sustanciales en la forma en que los alumnos se apropian de los objetos matemáticos. Esto ocurre debido a que las herramientas disponibles proporcionan las condiciones favorables para que los alumnos desarrollen competencias para argumentar, conjeturar, analizar, entre otras.

La función del docente en este contexto es ofrecer, a través del diseño de secuencias didácticas, un encuentro entre el alumno y el medio para que surja el conocimiento, ya que es en la interacción y experimentación cuando el estudiante comprende más el concepto que se quiere enseñar.

Resulta importante poder determinar si la visualización por medio del uso de ventanas personalizadas posibilita la comprensión e internalización adecuada de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y así, superar algunas de las dificultades con las que usualmente se encuentran los alumnos en el aprendizaje del tema. Por esta razón, en una segunda etapa se analizará el impacto que tiene el empleo de este tipo de recursos en el aprendizaje de los métodos numéricos que permiten resolver ecuaciones diferenciales.

REFERENCIAS

1. "Incidencia de las nuevas Tecnologías en el aprendizaje significativo de cálculo diferencial". Susana Albergante y Mirta González (2002). Jornadas de Ciencias Económicas. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.
2. "Análisis numérico", 7ma edición, Richard L. Burden, y J. Douglas Faires (2003) International Thompson Editores.
3. "Métodos numéricos con Matlab", John H. Mathews y Curtis D. Fink (2000) Prentice Hall, Madrid.
4. "Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico", David Kincaid y Ward Cheney (1994) Addison-Wesley, Estados Unidos.
5. "Métodos numéricos para ingenieros", Steven C. Chapra y Raymond P. Canale (2003) McGraw-Hill, México.
6. "The role of visual representations in the learning of Mathematics",Abraham Arcavi (1999) Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Morelos, México.
7. "Numerical Methods for Engineers and Scientists", Joe Hoffman (1992) Mac Graw – Hill; New York.